

EJERCICIOS DE POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1.- Desarrolla y simplifica:

$$(x-1)(x^2+x)^2 - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2)$$

$$(x+1)^2(3x^2+2) - 2(x^4 - x^3 + 2x^2 - 1)$$

$$(2x-3)^2 - (2x^2 + 4x + 1)(x-2)$$

2.- Halla el cociente y el resto de cada división:

a) $(-2x^4 + 3x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 2x + 2)$ b) $(-x^4 + 2x^2 - x + 2) : (x + 2)$

c) $(2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 1) : (x^2 + 2)$ d) $(-3x^4 + 6x^2 + x - 2) : (x - 1)$

e) $(2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1) : (x^3 - 2x + 1)$ f) $(2x^5 - 3x^3 + 2x - 1) : (x + 2)$

3.- Dado el polinomio $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x - 1$:

a) Halla el cociente y el resto de la división: $P(x) : (x - 2)$

b) ¿Cuánto vale $P(2)$?

4.- Factoriza estos polinomios:

a) $x^4 - 2x^3 + x^2$ b) $x^3 - 4x^2 + x + 6$ c) $x^5 + x^4 - 2x^3$ d) $x^3 - 3x + 2$

5.- Simplifica la fracción algebraica:

a) $\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2x - 1}{x - 1} - \frac{3x - 1}{x}$ b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x - 15} : \frac{2x - 10}{x^2 - 25}$

c) $\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^2 + x - 6}$ d) $\frac{3x^3 - 3x}{x^5 - x}$

e) $\left(\frac{1}{x} + x\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$ f) $1 + \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{4x^2-1}$

6.- Halla el valor de k para que $P(x) = kx^3 + 2kx^2 - 3x + 1$ sea divisible entre $x - 1$.

7.-

a) Halla el valor numérico de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ para $x = 1$.

b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x - 1$?

8.- Factoriza los polinomios siguientes:

a) $x^3 + 2x^2 + x$

b) $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

9.- Descompón en factores el numerador y el denominador, y luego simplifica.

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3}$$

10.- Calcula y simplifica:

a) $\frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x}$ b) $\frac{2x + 4}{x + 4} - \frac{2x - 14}{x - 5}$

EJERCICIOS DE POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1.- Desarrolla y simplifica:

$$(x-1)(x^2+x)^2 - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2)$$

$$(x+1)^2(3x^2+2) - 2(x^4 - x^3 + 2x^2 - 1)$$

$$(2x-3)^2 - (2x^2 + 4x + 1)(x-2)$$

Solución:

$$\begin{aligned} (x-1)(x^2+x)^2 - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2) &= (x-1)(x^4 + 2x^3 + x^2) - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2) = \\ &= x^5 + 2x^4 + x^3 - x^4 - 2x^3 - x^2 - x^5 + 5x^4 - x^3 + x^2 = 6x^4 - 2x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+1)^2(3x^2+2) - 2(x^4 - x^3 + 2x^2 - 1) &= (x^2 + 2x + 1)(3x^2 + 2) - 2(x^4 - x^3 + 2x^2 - 1) = \\ &= 3x^4 + 2x^2 + 6x^3 + 4x + 3x^2 + 2 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 2 = x^4 + 8x^3 + x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2x-3)^2 - (2x^2 + 4x + 1)(x-2) &= (4x^2 - 12x + 9) - (2x^3 + 4x^2 + x - 4x^2 - 8x - 2) = \\ &= 4x^2 - 12x + 9 - (2x^3 - 7x - 2) = 4x^2 - 12x + 9 - 2x^3 + 7x + 2 = -2x^3 + 4x^2 - 5x + 11 \end{aligned}$$

2.- Halla el cociente y el resto de cada división:

a) $(-2x^4 + 3x^3 - 2x + 3) : (x^2 - 2x + 2)$

b) $(-x^4 + 2x^2 - x + 2) : (x + 2)$

c) $(2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 1) : (x^2 + 2)$

d) $(-3x^4 + 6x^2 + x - 2) : (x - 1)$

e) $(2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1) : (x^3 - 2x + 1)$

f) $(2x^5 - 3x^3 + 2x - 1) : (x + 2)$

Solución:

$$\begin{array}{r} \text{a) } \begin{array}{r} -2x^4 + 3x^3 \qquad -2x + 3 \\ \underline{2x^4 - 4x^3 + 4x^2} \\ -x^3 + 4x^2 - 2x + 3 \\ \underline{x^3 - 2x^2 + 2x} \\ \qquad 2x^2 \qquad + 3 \\ \qquad \underline{-2x^2 + 4x - 4} \\ \qquad \qquad 4x - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \boxed{x^2 - 2x + 2} \\ \underline{-2x^2 - x + 2} \end{array} \end{array}$$

Cociente = $-2x^2 - x + 2$

Resto = $4x - 1$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & & 2 & -4 & 4 & -6 \\ \hline & -1 & 2 & -2 & 3 & -4 \end{array}$$

Cociente = $-x^3 + 2x^2 - 2x + 3$

Resto = -4

$$\begin{array}{r}
 c) \quad 2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 1 \quad \Big| \quad \frac{x^2 + 2}{2x^2 - 7x - 1} \\
 \underline{-2x^4 \quad -4x^2} \\
 -7x^3 - x^2 - 1 \\
 \underline{7x^3 \quad +14x} \\
 -x^2 + 14x - 1 \\
 \underline{x^2 \quad +2} \\
 14x + 1
 \end{array}$$

Cociente = $2x^2 - 7x - 1$

Resto = $14x + 1$

d) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & -3 & 0 & 6 & 1 & -2 \\
 1 & & -3 & -3 & 3 & 4 \\
 \hline
 & -3 & -3 & 3 & 4 & 2
 \end{array}$$

Cociente = $-3x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

Resto = 2

$$\begin{array}{r}
 e) \quad 2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1 \quad \Big| \quad \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 4} \\
 \underline{-2x^5 \quad +4x^3 \quad -2x^2} \\
 -3x^4 + 4x^3 - x + 1 \\
 \underline{x^4 \quad -6x^2 + 3x} \\
 x^3 - 6x^2 + 2x + 1 \\
 \underline{-4x^3 \quad + 8x - 4} \\
 -6x^2 + 10x - 3
 \end{array}$$

Cociente = $2x^2 - 3x + 4$

Resto = $-6x^2 + 10x - 3$

f) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 2 & 0 & -3 & 0 & 2 & -1 \\
 -2 & & -4 & 8 & -10 & 20 & -44 \\
 \hline
 & 2 & -4 & 5 & -10 & 22 & -45
 \end{array}$$

Cociente = $2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 10x + 22$

Resto = -45

3.- Dado el polinomio $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x - 1$:

- a) Halla el cociente y el resto de la división: $P(x) : (x - 2)$
 b) ¿Cuánto vale $P(2)$?

Solución:

a) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -8 & 3 & 1 \\ 2 & & 8 & 0 & 6 \\ \hline & 4 & 0 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\text{Cociente} = 4x^2 + 3$$

$$\text{Resto} = 5$$

b) Por el teorema del resto, sabemos que $P(2) = 5$.

4.- Factoriza estos polinomios:

a) $x^4 - 2x^3 + x^2$

b) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

c) $x^5 + x^4 - 2x^3$

d) $x^3 - 3x + 2$

Solución:

a) Sacamos factor común y utilizamos que $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x - 1)^2$$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x - 3)(x + 1)$$

c) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación:

$$x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x^2 + x - 2)$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Por tanto: $x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x - 1)(x + 1)$

d) Utilizamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

5.- Simplifica la fracción algebraica:

a) $\frac{1}{x^2 - x} + \frac{2x - 1}{x - 1} - \frac{3x - 1}{x}$

b) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x - 15} : \frac{2x - 10}{x^2 - 25}$

c) $\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^2 + x - 6}$

d) $\frac{3x^3 - 3x}{x^5 - x}$

e) $\left(\frac{1}{x} + x\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$

f) $1 + \frac{1}{2x - 1} - \frac{2x}{4x^2 - 1}$

Solución:

a) m.c.m. $[(x^2 - x), (x - 1), x] = x(x - 1)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - x} + \frac{2x - 1}{x - 1} - \frac{3x - 1}{x} &= \frac{1}{x(x - 1)} + \frac{x(2x - 1)}{x(x - 1)} - \frac{(3x - 1)(x - 1)}{x(x - 1)} = \\ &= \frac{1}{x(x - 1)} + \frac{2x^2 - x}{x(x - 1)} - \frac{3x^2 - 3x - x + 1}{x(x - 1)} = \frac{1 + 2x^2 - x - 3x^2 + 3x + x - 1}{x(x - 1)} = \\ &= \frac{-x^2 + 3x}{x(x - 1)} = \frac{x(-x + 3)}{x(x - 1)} = \frac{-x + 3}{x - 1} \end{aligned}$$

b) Efectuamos el cociente:

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x - 15} : \frac{2x - 10}{x^2 - 25} = \frac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 25)}{(x^2 + 2x - 15)(2x - 10)}$$

Factorizamos para simplificar:

- $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5) \rightarrow$ Producto notable

$$2x - 10 = 2(x - 5)$$

- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, ya que las raíces de $x^2 - 6x + 9 = 0$ son:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6}{2} = 3 \rightarrow \text{Raíz doble}$$

- $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$, ya que las raíces de $x^2 + 2x - 15 = 0$ son:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} \begin{cases} \frac{-10}{2} = -5 \\ \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Así:

$$\frac{(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 25)}{(x^2 + 2x - 15)(2x - 10)} = \frac{(x - 3)^2(x - 5)(x + 5)}{(x + 5)(x - 3)2(x - 5)} = \frac{x - 3}{2}$$

c) Factorizamos ambos polinomios:

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = x \cdot (2x^2 - 5x + 3)$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4} \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Luego:

$$2x^3 - 5x^2 + 3x = x(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$2x^2 + x - 6 = (x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right) \text{ ya que:}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^2 + x - 6} = \frac{x(x-1)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{(x+2)\left(x - \frac{3}{2}\right)} = \frac{x(x-1)}{x+2}$$

d) Resolvamos el ejercicio:

$$\frac{3x^3 - 3x}{x^5 - x} = \frac{3x(x^2 - 1)}{x(x^4 - 1)} = \frac{3x(x^2 - 1)}{x(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{3}{x^2 + 1}$$

En el primer paso sacamos factor común y en el segundo paso aplicamos el producto notable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ a la expresión $x^4 - 1$.

e) Efectuamos cada paréntesis y luego multiplicamos:

$$\left(\frac{1}{x} + x\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{1+x^2}{x+1}$$

f) Observamos que $4x^2 - 1 = (2x - 1)(2x + 1)$.

$$\text{Así, el m.c.m. } [1, (2x - 1), (4x^2 - 1)] = (2x - 1)(2x + 1).$$

Luego:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2x-1} - \frac{2x}{4x^2-1} &= \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{2x+1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{2x}{(2x-1)(2x+1)} = \\ &= \frac{4x^2 - 1 + 2x + 1 - 2x}{4x^2 - 1} = \frac{4x^2}{4x^2 - 1} \end{aligned}$$

6.- Halla el valor de k para que $P(x) = kx^3 + 2kx^2 - 3x + 1$ sea divisible entre $x - 1$.

Solución:

Para que $P(x)$ sea divisible ente $x - 1$, ha de ser $P(1) = 0$; es decir:

$$P(1) = k + 2k - 3 + 1 = 3k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{2}{3}$$

7.-

- a) Halla el valor numérico de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ para $x = 1$.
b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x - 1$?

Solución:

- a) $P(1) = 3 - 2 + 2 - 3 = 0$
b) Si. Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división $P(x) : (x - 1)$ coincide con $P(1)$. En este caso $P(1) = 0$, por tanto, $P(x)$ es divisible entre $x - 1$.

8.- Factoriza los polinomios siguientes:

- a) $x^3 + 2x^2 + x$
b) $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$

Solución:

- a) Sacamos factor común y utilizamos que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$:
 $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$
b) Utilizamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 7 & 7 & -15 \\ 1 & & 1 & 8 & 15 \\ \hline & 1 & 8 & 15 & 0 \\ -3 & & -3 & -15 & \\ \hline & 1 & 5 & 0 & \end{array}$$

$$x^3 + 7x^2 + 7x - 15 = (x - 1)(x + 3)(x + 5)$$

9.- Descompón en factores el numerador y el denominador, y luego simplifica.

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3}$$

Solución:

$$\frac{x^3 - 49x}{x^4 - 7x^3} = \frac{x(x^2 - 49)}{x^3(x - 7)} = \frac{x(x - 7)(x + 7)}{x^3(x - 7)} = \frac{x + 7}{x^2}$$

En el primer paso sacamos factor común; en el segundo paso aplicamos la identidad notable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ a la expresión $x^2 - 49$, y finalmente dividimos numerador y denominador entre el M.C.D. de ambos, que es $x(x - 7)$.

10.- Calcula y simplifica:

a) $\frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x}$

b) $\frac{2x + 4}{x + 4} - \frac{2x - 14}{x - 5}$

Solución:

- a) Efectuamos el producto:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x} = \frac{(x^4 - 3x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 6x + 9)}{(x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x)}$$

Factorizamos para simplificar:

- $x^4 - 3x^2 + 2x = x(x^3 - 3x + 2)$

Aplicamos Ruffini para calcular las raíces de la ecuación $x^3 - 3x + 2 = 0$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Así:

$$x^4 - 3x^2 + 2x = x(x-1)^2(x+2)$$

- $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
- $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
- $x^2 + 2x = x(x+2)$

Por tanto:

$$\frac{(x^4 - 3x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 6x + 9)}{(x^2 - 2x + 1) \cdot (x^2 + 2x)} = \frac{x(x-1)^2(x+2) \cdot (x-3)^2}{(x-1)^2 \cdot x(x+2)} = (x-3)^2$$

b) m.c.m. $[(x+4), (x-5)] = (x+4)(x-5)$

$$\frac{2x+4}{x+4} - \frac{2x+14}{x-5} = \frac{(2x+4)(x-5)}{(x+4)(x-5)} - \frac{(2x-14)(x+4)}{(x+4)(x-5)} =$$

$$= \frac{2x^2 - 10x + 4x - 20}{(x+4)(x-5)} - \frac{2x^2 + 8x - 14x - 56}{(x+4) \cdot (x-5)} = \frac{2x^2 - 6x - 20 - 2x^2 + 6x + 56}{(x+4) \cdot (x-5)} =$$

$$= \frac{36}{(x+4)(x-5)} = \frac{36}{x^2 - x - 20}$$